

# 杂交边界点法求解带自由面的渗流问题

谭 飞, 邓 帮, 张东明, 王元汉

(华中科技大学 土木工程与力学学院, 武汉 430074)

**摘 要:** 将杂交边界点法与迭代法相结合, 求解有自由面的渗流问题。杂交边界点法基于杂交位移变分原理和移动最小二乘近似, 利用基本解插值域内的场函数, 而边界上的变量则用移动最小二乘近似, 是一种纯边界类型的无网格方法。利用该方法只需在边界上布点而不需要划分任何网格的特性, 先假定自由面的初始位置, 再进行迭代求解。数值算例表明, 该方法精度较高、计算量较小, 适合于求解各种具有自由面的渗流问题。

**关 键 词:** 渗流; 自由面; 杂交边界点法; 迭代法

**中图分类号:** O 35; O 241

**文献标识码:** A

## Solution of seepage problem with free surface by hybrid boundary node method

TAN Fei, DENG Bang, ZHANG Dong-ming, WANG Yuan-han

(College of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** The seepage problem with a free surface is solved by combining the hybrid boundary node method (HBNM) and iterative method. The HBNM is based on a hybrid displacement variational principle and moving least square (MLS) approximation. The domain variables are interpolated by fundamental solution, while the boundary variables are approximated by MLS. Therefore, the HBNM is a truly boundary-type meshless method. Only nodes on the boundary are required and any mesh is not required. At first, the initial position of free surface is assumed; then the solution is obtained by the iterative method. The numerical example indicates that this method has high precision, little computation work; and it is suitable for solving various seepage problems with free surfaces.

**Key words:** seepage; free surface; hybrid boundary node method; iterative method

## 1 引 言

渗流自由面问题的研究是岩土工程中的一个重要研究课题, 该问题是一类边界条件复杂的非线性问题, 很难应用解析的方法进行求解。常用的数值方法有有限元法、边界元法和无网格法等。求解渗流自由面的有限元法可分为调整网格法和固定网格法。调整网格法<sup>[1]</sup>在每次迭代中都需要重新生成网格, 计算量很大, 且当初始自由面与最终自由面相差较大时易产生网格畸变。而固定网格法<sup>[2-7]</sup>虽在形式上网格保持不变, 但无法准确计算被自由面切割的单元的渗透矩阵。边界元法<sup>[8]</sup>较有限元法计算量小、计算精度更高, 但存在奇异积分和角点问题的处理。

由于无网格法不需要划分网格, 场函数的近似完全基于节点, 因此非常适合于求解此类具有移动

边界的渗流自由面问题。目前, 应用最广泛的无网格方法是无网格 Galerkin 法<sup>[9-12]</sup>(element-free Galerkin method, 简称 EFG)。该方法是一种域类型的无网格方法, 计算过程中需要积分背景网格, 因此计算量较大。Zhang 等<sup>[13-14]</sup>提出了杂交边界点法 (hybrid boundary node method, 简称 HBNM)。这是一种纯边界类型的无网格方法, 场函数插值和积分都不需要网格, 且只需在边界上布点, 具有输入数据简单, 计算量小的优点。本文将 HBNM 应用于渗流自由面问题的计算, 与常规迭代方法相结合求解渗流自由面。计算结果表明本文方法能有效分析这类渗流问题。

## 2 自由面渗流问题的数学模型

对二维、均质、不可压缩的流体, 不考虑内源, 如图 1 所示, 其各向同性土体中渗流的控制方程

和边界条件为<sup>[15]</sup>

在渗流区  $\Omega$  内, 有:

$$k\nabla^2 u = 0 \quad (1)$$

边界  $AB$  段上, 有:

$$u(x, y) = H_1 \quad (2)$$

边界  $FG$  段上, 有:

$$u(x, y) = H_2 \quad (3)$$

边界  $AG$  及自由面  $BE$  段上, 有:

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (4)$$

自由面  $BE$  及溢出面  $EF$  段上, 有:

$$u(x, y) = y \quad (5)$$

式中:  $k$  为渗透系数;  $u$  为总水头;  $n$  为边界的外法线方向;  $H_1$ 、 $H_2$  分别为上、下游水位。

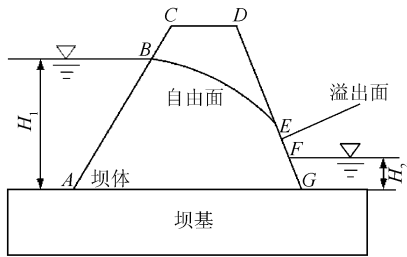


图1 坝体的渗流示意图  
Fig.1 Seepage in the dam

### 3 杂交边界点方法

由渗流自由面问题的数学模型可见, 该问题实质上为 Laplace 边值问题:

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (6)$$

$$u = \bar{u} \quad (\text{在 } \Gamma_u \text{ 上}) \quad (7)$$

$$k \frac{\partial u}{\partial n} \equiv q = \bar{q} \quad (\text{在 } \Gamma_q \text{ 上}) \quad (8)$$

式中:  $\bar{u}$  和  $\bar{q}$  分别是水头已知的边界  $\Gamma_u$  和法向流已知的边界  $\Gamma_q$  上的边界值。

杂交边界点法基于杂交位移变分原理和移动最小二乘近似(moving least square, 简称 MLS)。杂交位移变分原理中含有 3 个相互独立的场函数: 域内的势函数  $u$ , 边界上的势函数  $\tilde{u}$ , 边界上的法向流函数  $\tilde{q}$ 。相应的修正泛函为<sup>[13]</sup>

$$\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} u_{,i} u_{,i} d\Omega - \int_{\Gamma} \tilde{q} (u - \tilde{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \tilde{u} d\Gamma \quad (9)$$

由  $\delta\Pi = 0$  可以得到下面的弱积分方程:

$$\int_{\Gamma} (q - \tilde{q}) \delta u d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,i} \delta u_{,i} d\Omega = 0 \quad (10)$$

$$\int_{\Gamma} (u - \tilde{u}) \delta \tilde{q} d\Gamma = 0 \quad (11)$$

由于该变分原理是一个普适定理, 因此对于任意形状和大小的局部子域  $\Omega_s$ , 式 (10)、(11) 都成立。为简便起见, 本文将子域  $\Omega_s$  取为以节点  $S_j$  为圆心的圆与求解域的交集(如图 2 所示)。则当:

$$\int_{\Gamma_s + L_s} (q - \tilde{q}) v d\Gamma - \int_{\Omega_s} u_{,i} v_{,i} d\Omega = 0 \quad (12)$$

$$\int_{\Gamma_s + L_s} (u - \tilde{u}) v d\Gamma = 0 \quad (13)$$

式中:  $\Gamma_s + L_s$  为子域  $\Omega_s$  的边界;  $v$  为某个任意的检验函数。为避免边界  $L_s$  上的积分, 将检验函数取为

$$v_j(Q) = \begin{cases} \frac{\exp[-(d_j/c_j)^2] - \exp[-(r_j/c_j)^2]}{1 - \exp[-(r_j/c_j)^2]}, & 0 \leq d_j \leq r_j \\ 0, & d_j \geq r_j \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $d_j$  为求解域内任意点  $Q$  到节点  $S_j$  的距离;  $c_j$  为控制检验函数的参数;  $r_j$  为子域半径。

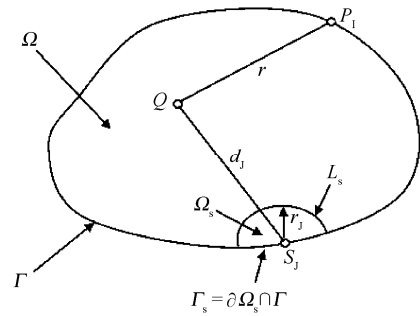


图2 子域  $\Omega_s$  以及相应基本解的源点  $P_i$   
Fig.2 Local domain  $\Omega_s$  and source point of the fundamental solution corresponding to  $P_i$

求解域  $\Omega$  内的场函数  $u$  和  $q$  用基本解插值:

$$u = \sum_{I=1}^N U_I x_I \quad (15)$$

$$q = \sum_{I=1}^N \frac{\partial U_I}{\partial n} x_I \quad (16)$$

式中:  $U_I$  为以节点  $P_i$  为源点的基本解,  $U_I = -1/2\pi \ln r$ ;  $x_I$  为未知参数;  $N$  为边界节点总数。

边界上的场函数  $\tilde{u}$  和  $\tilde{q}$  利用 MLS 近似, 即

$$\tilde{u} = \sum_{I=1}^N \Phi_I(s) \hat{u}_I \quad (17)$$

$$\tilde{q} = \sum_{I=1}^N \Phi_I(s) \hat{q}_I \quad (18)$$

式中:  $\hat{u}_I$  和  $\hat{q}_I$  为虚拟的节点值;  $\Phi_I(s)$  为节点  $S_I$  的

形函数:

$$\Phi_I(s) = \sum_{j=1}^m p_j(s) [A^{-1}(s)B(s)]_{ji} \quad (19)$$

式中:  $s$  为节点参数坐标;  $p_j(s)$  为  $m$  阶基函数, 一般取线性基, 即  $m=3$ ,  $p^T(s)=[1, s, s^2]$ 。矩阵  $A(s)$  和  $B(s)$  为

$$A(s) = p^T(s)w(s)p(s) \quad (20)$$

$$B(s) = p^T(s)w(s) \quad (21)$$

式中:  $w(s)$  为对角矩阵, 其对角线元素为权函数, 本文将其选取为如下的 Gaussian 权函数:

$$w_I(s) = \begin{cases} \frac{\exp[-(d_I/c_I)^2] - \exp[-(r_I/c_I)^2]}{1 - \exp[-(r_I/c_I)^2]}, & 0 \leq d_I \leq r_I \\ 0, & d_I \geq r_I \end{cases} \quad (22)$$

式中:  $d_I = |s - s_I|$  为计算点与节点  $s_I$  间的距离;  $c_I$  为控制权函数的参数;  $r_I$  为权函数的支持域的半径。

将式 (15) ~ (18) 代入式 (12)、(13), 并利用刚体位移法处理式 (12) 中的第 2 项和奇异积分, 则可以得到

$$\sum_{I=1}^N \int_{\Gamma_s} \frac{\partial U_I}{\partial n} v_J(Q) x_I d\Gamma = \sum_{I=1}^N \int_{\Gamma_s} \Phi_I(s) v_J(Q) \hat{q}_I d\Gamma \quad (23)$$

$$\sum_{I=1}^N \int_{\Gamma_s} U_I v_J(Q) x_I d\Gamma = \sum_{I=1}^N \int_{\Gamma_s} \Phi_I(s) v_J(Q) \hat{u}_I d\Gamma \quad (24)$$

对所有节点列出上面两个方程, 得

$$U_U \mathbf{x} = H_U \hat{\mathbf{q}} \quad (25)$$

$$V_U \mathbf{x} = H_U \hat{\mathbf{u}} \quad (26)$$

式中:  $U_U = \int_{\Gamma_s} v_I(Q) \frac{\partial U_J}{\partial n} d\Gamma$ ;  $V_U = \int_{\Gamma_s} v_I(Q) U_J d\Gamma$ ;  $H_U = \int_{\Gamma_s} v_I(Q) \Phi_J(s) d\Gamma$ 。

由于 MLS 近似采用的形函数不满足 Kronecker- $\delta$  条件, 故本文采用节点的实值与虚值交换法施加本质边界条件<sup>[14]</sup>。

## 4 渗流自由面的迭代求解

对于渗流自由面问题, 由于自由面未知, 具有非线性特性, 需要迭代求解。如图 1 所示, 渗流自由面  $BE$  的边界条件为:  $u(x, y) = y$  和  $k \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ 。具体的迭代步骤如下:

(1) 设定渗流自由面的初始位置  $y^0$ , 并令自由面  $BE$  段满足边界条件  $k \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ 。

(2) 利用 HBNM 求解渗流场, 得到渗流自由面上的水头分布  $u$ 。

(3) 判断渗流自由面上水头值与其  $y$  坐标的差是否满足误差要求, 即  $|u - y| \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  为给定的精度要求。如已满足, 则迭代结束, 否则根据求得的自由面水头值调整自由面位置。

(4) 重复 (2) ~ (4) 步, 进行迭代计算。

## 5 数值算例

### 5.1 均质矩形坝

某均质矩形坝体, 宽 4.0 m。已知上游水位为 6.0 m、下游水位为 1.0 m、底部不透水, 渗透系数取为  $k = 1.0$  m/s。本文计算时, 在自由面边界上取 40 个节点, 其余边界上均布置 8 个节点。相关计算参数取为: 局部子域半径  $r_j = 0.9h$ , 参数  $c_j$  的取值使得  $r_j/c_j = 1.2$ , MLS 的权函数的支持域半径  $d_I$  取为  $3.5h$ , 参数  $c_I$  的取值使得  $r_I/c_I = 0.5$ ,  $h$  为节点之间的平均距离, 取初始逸出高度为 3.0 m, 假定初始自由面如图 3 所示。

误差控制如取为  $\varepsilon = 10^{-3}$ , 经过 23 次迭代, 渗流自由面位置的计算结果如图 3 所示, 其中的甘油模型试验结果由文献[3]给出。由图 3 可见本文结果与甘油模型试验非常接近。典型坐标点处自由面的高程及其误差见表 1, 其中文献[1]采用有限元固定网格和移动网格相结合的方法。表 1 的结果表明本文方法具有很高的计算精度。

表 1 各种不同方法计算自由面水头值的比较

Table 1 Comparison of computational head pressures of the free surface by different methods

| $x/m$ | 甘油模型计算结果 | 本文方法     |             | 文献[1]    |             |
|-------|----------|----------|-------------|----------|-------------|
|       |          | 计算结果 / m | 与甘油模型误差 / % | 计算结果 / m | 与甘油模型误差 / % |
| 1.0   | 5.63     | 5.64     | 0.20        | 5.61     | 0.36        |
| 2.0   | 5.10     | 5.10     | 0.06        | 5.11     | 0.20        |
| 3.0   | 4.38     | 4.37     | 0.30        | 4.37     | 0.23        |
| 4.0   | 3.25     | 3.23     | 0.71        | 3.21     | 1.23        |

### 5.2 非均质土坝

如图 4 所示的水平分层介质土坝, 自上而下共分为 3 层, 第 2、3 层高度均为 6 m, 各层均匀各向同性, 渗透系数分别为  $k_1 = 1.0$  m/d,  $k_2 = 0.1$  m/d,  $k_3 = 10.0$  m/d。坝基面高程为 0.0 m, 坝顶高程为 20.0 m, 坝顶宽度为 7.0 m, 上游坝坡坡度  $m_1 = 1:2.5$ , 下游坝坡坡度  $m_1 = 1:2.0$ , 上游水位高程为 18.0 m, 下游无水, 基础为不透水层。本文计算时, 在自由面边界上取 40 个节点, 其余边界上均布置 15 个节点,

其他计算参数与前相同。

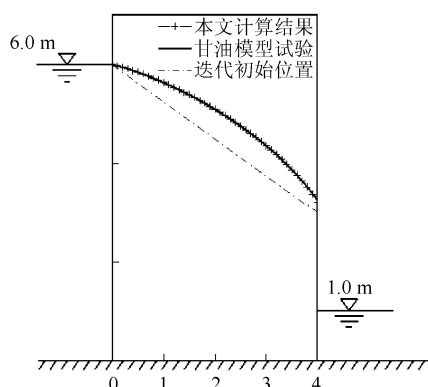


图3 自由面水头计算值与试验值

Fig.3 Computational and experimental water pressures of free surface

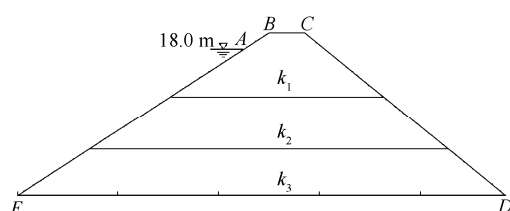


图4 水平分层介质土坝

Fig.4 An earth dam with horizontal layered media

误差控制如取为  $\varepsilon = 10^{-3}$ ，经过 47 次迭代，计算得逸出点高度为 2.173 m，渗流自由面位置的计算结果如图 5 所示。由图 5 可看出，自由面在介质界面发生偏转，这与渗流的折射现象是相符合的。

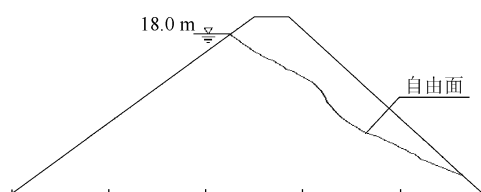


图5 土坝的自由面图

Fig.5 Free surface of an earth dam

## 6 结 语

本文将杂交边界点法应用于渗流自由面问题的求解。由于杂交边界点法是一种纯边界类型的无网格方法，既不需要形函数插值网格，也不需要背景积分网格，因此在求解渗流自由面问题时具有一定的优势。与有限元法相比，由于不需要划分网格，避免了对有自由面穿越的网格的重新处理和网格畸变现象的发生；与无网格 Galerkin 法相比，本文方法只需在边界上布点，且不需要背景积分网格，降低了求解问题的维数，减少了前处理工作量。数

值算例的结果表明本文方法计算量小，精度高，适合于分析渗流自由面有关的岩土力学工程实际。

## 参 考 文 献

- [1] 李宝元, 任亮. 求解带自由面渗流问题移动网格法的改进及其工程应用[J]. 计算力学学报, 2007, 24(3): 370—374.  
LI Bao-yuan, REN Liang. Improvement of moving mesh method in solving seepage problem with free surface and its application[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, 24(3): 370—374.
- [2] 张有天, 陈平, 王镭. 有自由面渗流分析的初流量法[J]. 水利学报, 1988, (8): 18—26.  
ZHANG You-tian, CHEN Ping, WANG Lei. Initial flow method for seepage analysis with free surface[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1988, (8): 18—26.
- [3] 王媛. 求解有自由面渗流问题的初流量法的改进[J]. 水利学报, 1998, (3): 68—73.  
WANG Yuan. The modified initial flow method for 3-D unconfined seepage computation[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1998, (3): 68—73.
- [4] BATHLE K J, KHOSHGOFTAR M R. Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1979, 3(1): 13—22.
- [5] DEASAI C S. A residual flow procedure and application for free surface flow in porous media[J]. *Advances in Water Resources*, 1983, 6: 27—35.
- [6] 郑宏, 刘德富, 李焯芬, 等. 一个新的有自由面渗流问题的变分不等式[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(3): 363—374.  
ZHENG Hong, LIU De-fu, LEE C F, et al. New variational inequality formulation for seepage problems with free surfaces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, 26(3): 363—374.
- [7] 郑宏, 戴会超, 刘德富. 改进的有自由面渗流问题的 Bathe 算法[J]. 岩土力学, 2005, 26(4): 505—512.  
ZHENG Hong, DAI Hui-chao, LIU De-fu. Improved Bathe's algorithm for seepage problems with free surfaces[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2005, 26(4): 505—512.
- [8] 闵兴鑫, 陈江, 张少杰. 渗流自由面计算的边界元法[J]. 水电能源科学, 2008, 26(6): 73—75.  
MIN Xing-xin, CHEN Jiang, ZHANG Shao-jie. Boundary element method for seepage analysis with free surface[J].